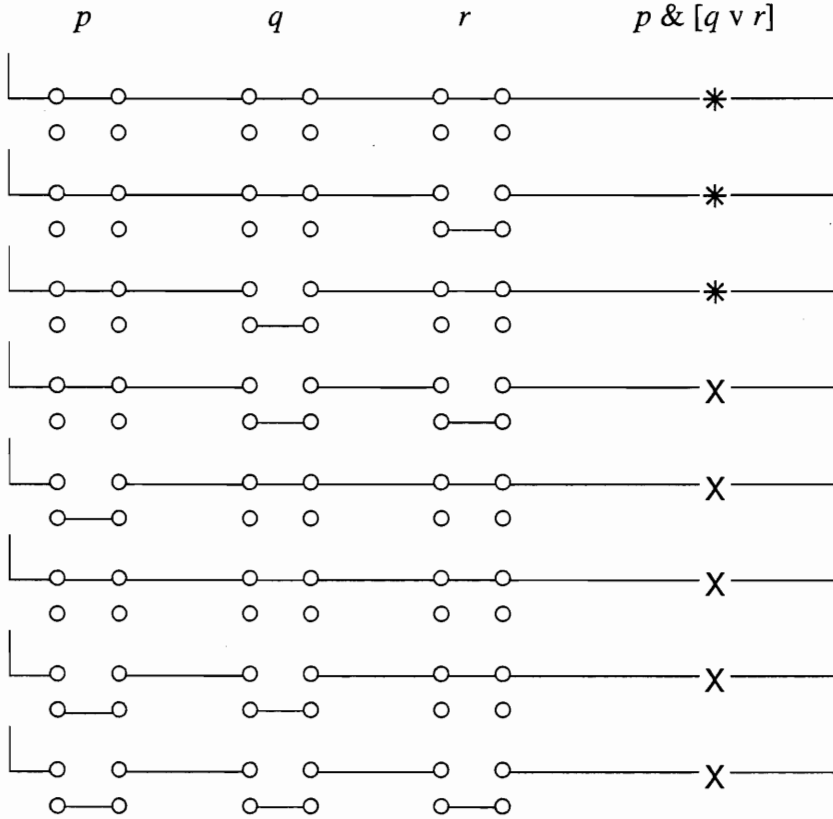


Aquí está el diagrama de un circuito que incorpora tres proposiciones:  $p \ \& \ [q \vee r]$ :



La computadora funciona con base en la conjunción, disyunción y negación, y se refiere a los dispositivos electrónicos correspondientes como “puerta-y” y “puerta-o” y “convertidor”.

También se usan conmutadores llamados “borrosos” (ver la introducción), los cuales, en vez de representar sólo dos estados, prendido y apagado, admiten otros valores. Hay semiconductores cuyos interruptores funcionan como “coladores” (*sieves*) que dejan pasar varias cantidades de corriente, p. ej., de 1 a 10 o de 1 a 100.

### 1.1.8 Formalización

Una buena regla empírica para traducir el lenguaje ordinario al simbolismo lógico es: *traduzca el sentido*, no las palabras. Generalmente no existe ninguna correspondencia de uno a uno entre las palabras y los símbolos. Es como la interpretación simultánea: el traductor oye una oración de la primera lengua, capta el contenido y expresa éste en la segunda lengua. Hay que “subir”, pues, al contenido:



La oración y la fórmula pueden expresar aproximadamente el mismo contenido, pero en la filosofía conviene que el simbolismo lógico represente lo que se quiere decir de la manera más exacta posible.

Aquí están varios ejemplos de la formalización (antes de mirar las traducciones, se sugiere que el estudiante trate de simbolizarlas por sí mismo):

1. Don Quijote está feliz.	$F$
2. Dulcinea ama a don Quijote.	$A$
3. Don Quijote está feliz.	$Q$
4. Don Quijote está feliz si Dulcinea lo ama.	$A > F$
5. Don Quijote no está feliz si Dulcinea no lo ama.	$\sim A > \sim F$
6. Don Quijote está feliz si Dulcinea lo ama.	$A > Q$
7. Si Dulcinea ama a don Quijote, éste está feliz.	$A > Q$
8. Dulcinea ama a don Quijote si éste está feliz.	$Q > A$
9. Don Quijote está feliz si Rocinante come bien.	$R > Q$
10. Don Quijote está feliz sólo si Rocinante come bien.	$Q > R$
11. Don Quijote está feliz ssi Rocinante come bien.	$Q \diamond R$
12. Don Quijote está feliz si está feliz.	$F > F$
13. Don Quijote es una ficción o Dulcinea es una ficción.	$Q \vee D$
14. Don Quijote o Dulcinea es una ficción.	$Q \vee D$
15. Don Quijote y Dulcinea son personajes famosos.	$Q \& D$
16. Dulcinea es bella pero don Quijote es feo.	$B \& F$
17. Dulcinea es bella y lista pero don Quijote es tonto.	$[B \& L] \& T$
18. Si don Quijote es tonto y feo, soy el rey de China.	$[T \& F] > C$
19. Soy el rey de China si don Quijote es tonto o feo.	$[T \vee F] > C$
20. Si no soy el rey de China, Dulcinea es bella.	$\sim R > D$
21. Si don Quijote es tonto pero no feo, estoy contento.	$[T \& \sim F] > C$
22. Estoy contento si don Quijote es feo pero no tonto.	$[F \& \sim T] > C$
23. Veo el arcoiris si llueve y hay sol.	$[L \& S] > V$
24. Me mojo si llueve y si es cierto que si llueve me mojo.	$[L \& [L > M]] > M$
25. Muero si muero o vivo y no vivo.	$[[M \vee V] \& \sim V] > M$
26. Si muero o no muero y no muero entonces muero.	$[[M \vee \sim M] \& \sim M] > M$

### \* UNIDAD DE EJERCICIOS 1: TRADUCCIÓN

A. Traduzca las siguientes expresiones de nuestro sistema de todas las maneras posibles y, si alguna expresión no es traducible, indíquelo escribiendo “no”. Algunas respuestas se dan. En el caso de una implicación, por ejemplo:

Dulcinea se pone triste ( $D$ ) si Rocinante está enfermo ( $R$ )

tenga cuidado de poner la cláusula condicional (la gobernada por “si”) *antes* (a la izquierda) de la otra cláusula:

$R > D$       (no  $D > R$ ),

A1. Hay sol y la tierra está seca.

A2. Llueve.

*L*

A3. No llueve.

A4. Lluvia.

(no se puede traducir)

A5. Está lloviendo.

A6. La tierra seca.

A7. ¡Seca la ropa!

A8. La tierra está seca ahora.

A9. Hace sol.

A10. La tierra está seca (*T*) si hay sol (*S*).

*S > T*

A11. Si la tierra está seca, hay sol.

A12. Si está seca la tierra, hace sol.

A13. Estar lloviendo mucho.

A14. Hay sol si la tierra está seca.

A15. Lloviendo.

A16. Si llueve y hay sol puedes ver el arcoiris.

A17. Puedes ver el arcoiris si llueve y hay sol.

A18. Si nieva, entonces Jaime tiene frío y se resfría.

A19. Rocinante tiene frío y se resfría si nieva.

*N > [F & R]*

A20. Si hace frío, hace frío.

A21. Hace frío o hace frío.

A22. Hace frío y hace frío.

A23. Si hace frío, entonces si hace frío, hace frío.

A24. De hacer frío, la tierra está seca.

A25. Si hace frío, entonces si hace calor, hace frío.

A26.  $2 + 2 = 4$ .

A27. Dos más dos son cuatro.

A28.  $2 + 2 = 5$ .

*D*

A29. Alemania está en México.

A30. Alemania no está en México.

A31. Dulcinea rompe con don Quijote pero se casa con Sancho.

A32. Dulcinea rompe con don Quijote y Dulcinea se casa con Sancho.

A33. Dulcinea rompe con don Quijote si ella se casa con Sancho.

A34. Quiero irme a casa.

A35. Si Dulcinea rompe con don Quijote y se casa con Sancho, entonces don Quijote está feliz o Sancho está feliz.

A36. Dulcinea y María estarán contentas.

A37. Dulcinea estará feliz y María está feliz.

A38. Dulcinea está feliz y seguirá siéndolo.

A39. Si  $a + b = b + a$  y si  $a = 2$  y  $b = 3$ , entonces  $2 + 3 = 3 + 2$ .

A40. ¡Lárgate!

A41. Ser o no ser.

- A42. Seré o no seré.  
 A43. El tosul está ahora en el mopote.  
 A44. La muy inquietante perspectiva de otra guerra mundial.  
 A45. No es probable la verdaderamente inquietante perspectiva de una tercera guerra mundial.  
 A46. ¡Arriba las manos!  
 A47. ¿Salen ustedes esta noche?  
 A48. ¡Qué noche más bella!  
 A49. Mesa la sobre azul Rocinante está.  
 A50. Rocinante y don Quijote son geniales.  
 A51. Rocinante es alto o gordo.  
 A52. Rocinante y don Quijote son altos y gordos.  
 A53. Si, si Dulcinea llora relincha Rocinante, y si Rocinante relincha se pone nervioso don Quijote, entonces si Dulcinea llora don Quijote se pone nervioso.

A v G

- B. Notación polaca: transcriba en símbolos polacos los números 3, 10, 16, 18, 35 y 53 anteriores.  
 C. En 53, compare (en cuanto a la sencillez) la oración española con la fórmula que la representa.  
 D. Circuitos electrónicos

- D1. Haga un circuito que represente la equivalencia (coimplicación):  $p \leftrightarrow a$ .  
 D2. Haga y compare los circuitos que representen:

$$p \& [q \vee r]$$

$$[p \& q] \vee r$$

- D3. Haga un circuito que represente la implicación:  $p \supset q$ .

## 1.2 Reglas de cálculo proposicional

### 1.2.1 Las reglas y el metalenguaje

La lógica funciona con base en reglas, las cuales nos permiten colocar nuevos pasos en una prueba formal, deduciéndolos de pasos previos. La estrategia de resolver pruebas es esencialmente la capacidad de reconocer pautas en que una regla es aplicable.

Expresamos las reglas con las letras *mayúsculas* de la primera parte del alfabeto: *A*, *B*, *C*, etc. Estos símbolos no expresan proposiciones (o esto puede asumirse) sino que se refieren a otros símbolos —constantes o variables—, los cuales a su vez expresan proposiciones. Por ejemplo, *A* es reemplazable por los símbolos *p*, *q*, *S* (“hay sol”), *B* (“don Quijote besa a Dulcinea”), *C* (“ $2 + 2 = 4$ ”), etc. *A* y *B* se llaman metasímbolos y el sistema de tales símbolos se llama *metalenguaje*. Los símbolos que expresan proposiciones (tales como *p*, *q*, *S*, *B*, *C*) pertenecen al *lenguaje-objeto*, en contraste con el metalenguaje, cuyos símbolos se refieren a los del lenguaje-objeto. Podemos hablar, pues, de dos niveles

lingüísticos, que los lógicos escolásticos llamaban términos de primera (lenguaje-objeto) y de segunda intensión (metalenguaje):

metalenguaje	$A, B, C$
lenguaje-objeto	$S, B, C (p, q, r)$
proposiciones	

Todas las reglas (con la excepción de las semirreglas, 1.2.2) se clasifican en pares: de *introducción* y de *eliminación* (tales reglas a veces se llaman “intelimas”).

### 1.2.2 Las semirreglas

Hay tres “semirreglas” sencillas, las cuales no son de introducción o eliminación:

1. **h: hipótesis.** Cada paso encima de la rayita de un secuento hipotético será justificado por “h”. Tales proposiciones son presuposiciones del argumento y se llaman “premisas”. Éstas son las condiciones de la prueba en el sentido de que *si* son V, los pasos de abajo (que se siguen de ellas lógicamente) también son V. Porque las hipótesis no se remiten a pasos anteriores, ningún número acompaña la “h” de la justificación. La regla se expresa así:

$$\begin{array}{l|l} 1 & A \\ \hline & \mathbf{h} \end{array}$$

Puede haber cualquier número de hipótesis:

$$\begin{array}{l|l} 1 & p \\ 2 & s > [r \ \& \ q] \\ & \dots \\ \hline & \end{array}$$

2. **r: repetición.** Cada paso puede repetirse las veces que se quiera, y hay que poner el número del paso repetido:

$$\begin{array}{l|l} 1 & A \\ \hline 2 & A \\ & \mathbf{1 \ r} \end{array}$$

Generalmente la repetición no ayuda para resolver las pruebas (hay excepciones) y su uso puede ser una simple petición de principio (ver la introducción). Veremos un ejemplo de su uso correcto (1.3.2). Los alumnos que comienzan a estudiar la lógica tienen la tendencia a emplear “r” demasiado.

El uso más frecuente de la repetición es la *definición*, cuando se repite una fórmula en su forma abreviada o al revés. En este caso escribimos “*df*” después de “*r*”:  $r_{df}$ . La regla en este caso sería:

$r_{df}$ : repetición según una definición: donde  $A =_{df} B$ :

$$\begin{array}{l|l} 1 & A \\ \hline 2 & B \end{array} \quad 1 \ r_{df}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & B \\ \hline 2 & A \end{array} \quad 1 \ r_{df}$$

Por ejemplo, definiremos o abreviaremos  $[p > q] \ \& \ [q > p]$  como “ $p \diamond q$ ” (1.5.1), y mediante la regla  $r_{df}$  permitimos que se escriba la forma larga en vez de la corta y la corta en vez de la larga:

$$\begin{array}{l|l} 1 & p \diamond q & \mathbf{h} \\ \hline 2 & [p > q] \ \& \ [q > p] & 1 \ r_{df} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & [p > q] \ \& \ [q > p] & \mathbf{h} \\ \hline 2 & p \diamond q & 1 \ r_{df} \end{array}$$

3. *i: iteración*. Cualquier paso puede iterarse en una subprueba (categórica o hipotética) con tal que la iteración se haga: 1) a la *derecha*, 2) para *abajo*, y 3) en una subprueba que esté *abarcada* por el secunte de donde viene la fórmula iterada.

$$\begin{array}{l|l} 1 & A \\ \hline 2 & | \ A \end{array} \quad 1 \ i$$

Permitimos que una proposición se itere en dos subpruebas a la vez:

$$\begin{array}{l|l} 1 & A \\ \hline 2 & | \\ 3 & | \ | \ A \end{array} \quad 1 \ i$$

Esta operación es un atajo; en realidad estamos iterando la proposición en cada subprueba:

1	A		
2		A	1 i
3		A	2 i

Es importante recordar que se trata de un atajo, pues en otras partes de la lógica (predicativa, modal; 2.3.5, etc.) impondremos más restricciones en la iteración, y al iterar una proposición en más de una subprueba al mismo tiempo, debemos observar las restricciones (si las hay) de cada una.

### 1.3 Implicación

#### 1.3.1 La regla *modus ponens*

Las reglas de la implicación, como las otras relaciones proposicionales, son de introducción y de eliminación. La regla de eliminación es:

**mp**: *modus ponens* (“*modus ponendo ponens*”)

Es la expresión latina para decir: “la regla según la cual se afirma el consecuente de una implicación al afirmarse su antecedente”):

1	A > B	
2	A	
3		B

1, 2 **mp**

Un ejemplo de constantes; aquí *L*: “llueve” y *M*: “me mojo” (en la regla, *A* es reemplazada por *L* y *B* por *M*):

1	L > M	h
2	L	h
3		M

1, 2 **mp**

Si es cierto que si llueve me mojo y también que llueve, puedo concluir que me mojo. No es necesario que la implicación aparezca primero; pudiéramos haber escrito la regla:

1	L	h
2		L > M
3		M

1, 2 **mp**

El orden de las premisas, pues, es indiferente. Tampoco importa si hay proposiciones entre las dos fórmulas en las que opera el **mp** o entre ellas y la fórmula que éste justifica:

1	$r$	<b>h</b>
2	$s$	<b>h</b>
3	$t$	<b>h</b>
4	$s > q$	<b>h</b>
5	$p$	<b>h</b>
6	$q$	2, 4 <b>mp</b>

No es necesario repetir los pasos 2 y 4 para que se queden juntos antes de la aplicación de **mp**.  $A$  y  $B$  en una regla pueden por supuesto aludir a proposiciones moleculares:

1	$[p > q] > r$	<b>h</b>
2	$p > q$	<b>h</b>
3	$r$	1, 2 <b>mp</b>

### 1.3.2 La regla de la introducción de la implicación

#### *ii: introducción de la implicación*

La regla **ii** exige el uso de un secuento subordinado, e. d., de una subprueba. Si hay en la parte inferior de una prueba una implicación que queremos justificar (un caso muy común), hacemos lo siguiente: 1) escribimos una subprueba hipotética (para arriba), 2) colocamos el antecedente de la implicación como hipótesis de la subprueba, y 3) ponemos el consecuente de la implicación como el último paso de la subprueba. Se trata entonces de justificar este último paso. La regla se expresa así:

1		$A$	<b>h</b>
		...	
$n$		$B$	$i?$
$n + 1$		$A > B$	1- $n$ <b>ii</b>

Note que se refiere a una subprueba escribiendo el número de su primer paso y después un guión con el número de su último paso.

Un ejemplo es la prueba de la repetición condicionada:  $p > [q > p]$  (note que lo que se quiere demostrar en una prueba formal es la conclusión, el último paso):

1	p	h
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;">q</div>	h
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;">p</div>	1 i
4	q > p	2-3 ii
5	p > [q > p]	1-4 ii

El siguiente ejemplo contiene proposiciones negativas, pero no necesita sino reglas de la implicación:

1	p	h
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;">~p</div>	h
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;">p</div>	1 i
4	~p > p	2-3 ii
5	p > [~p > p]	1-4 ii

La regla **ii** es una forma del “teorema de la deducción” o del “principio de la condicionalización” desarrollado probablemente por los lógicos estoicos y últimamente por G. Gentzen y S. Jaśkowski.<sup>31</sup>

### 1.3.3 Estrategia

En el caso de **mp** se trabaja “para abajo”:

1	p > q	h
2	p	h
	i?	(mp)

pero frecuentemente se encuentra abajo el paso que queremos justificar con **mp**. En el caso de **ii** se trabaja “para arriba”:

	i?	
	p > q	(ii)

Veamos más de cerca la prueba de la repetición condicionada de arriba:

<sup>31</sup> Fitch, *Symbolic Logic*, p. 30, W. y M. Kneale, *The Development of Logic*, p. 538 y ss, B. Mates, p. 538 y ss y *Stoic Logic*, p. 70.

- Comenzamos con la tautología que queremos demostrar:

$$p > [q > p]$$

- Primero se escribe la proposición a probar como último paso de una prueba categórica (pues carece de la rayita  $\vdash$ ):

$$\left| \begin{array}{l} p > [q > p] \end{array} \right.$$

Es un error común de los principiantes olvidarse de este secuento categórico y escribir inmediatamente la subprueba que corresponde a la regla **ii**.

- Después se construye una subprueba encima del último paso y se pone a la derecha “**ii**” y el primer número de la subprueba (ya lo sabemos en este caso, pues resulta ser el primer paso de la prueba):

$$\begin{array}{l|l|l} 1 & \left| \begin{array}{l} p \\ \vdash \\ i? \\ q > p \end{array} \right. & \mathbf{h} \\ & p > [q > p] & 1-i? \mathbf{ii} \end{array}$$

- Pero porque queda otra implicación abajo por justificar ( $q > p$ ), repetimos el mismo proceso, escribiendo otra subprueba con el nombre de la regla (**ii**) y el número 2 (porque 2 es el primer número de esta subprueba):

$$\begin{array}{l|l|l} 1 & \left| \begin{array}{l} p \\ \vdash \\ 2 \left| \begin{array}{l} q \\ \vdash \\ i? \\ p \\ q > p \end{array} \right. & \mathbf{h} \\ & p > [q > p] & 2-i? \mathbf{ii} \\ & & 1-i? \mathbf{ii} \end{array} \right.$$

- Pero ya vemos que  $p$  puede ser justificado simplemente iterando el paso 1, y tenemos la prueba completa de arriba.

Tomemos un ejemplo más complejo; queremos probar:

$$q > [[[p > q] > r] > r]$$

Escribimos las dos subpruebas que corresponden a los dos usos de la regla **ii**:

1		$q$	<b>h</b>
2			<b>h</b>
			$[p > q] > r$
			...
			$r$ — ¿cómo justificar?
			$[[p > q] > r] > r$
		$q >$	$[[[p > q] > r] > r]$

Ahora el problema es ¿cómo justificar  $r$ ? Se ve inmediatamente que si tuviéramos  $p > q$ , podríamos sacar  $r$  con *modus ponens* a partir del segundo paso  $[p > q] > r$ . Escribamos  $p > q$  abajo, a ver si lo podemos justificar:

1		$q$	<b>h</b>
2			<b>h</b>
			$[p > q] > r$
			...
			$p > q$ — ¿cómo justificar?
			$r$ — justificable con <b>mp</b>
			$[[p > q] > r] > r$
		$q >$	$[[[p > q] > r] > r]$

Evidentemente podemos justificar  $p > q$  con **ii**, por ser una implicación que se encuentra abajo; escribimos, pues, su subprueba para arriba:

1		$q$	<b>h</b>
2			<b>h</b>
3			<b>h</b>
			$[p > q] > r$
			$p$
			...
			$q$
			$p > q$
			$r$ — justificable con <b>mp</b>
			$[[p > q] > r]$
		$q >$	$[[[p > q] > r] > r]$

Finalmente,  $q$  se justifica fácilmente iterándolo del primer paso, y la prueba está completa:

1	$q$	<b>h</b>
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;"><math>[p &gt; q] &gt; r</math></div>	<b>h</b>
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;"><math>p</math></div>	<b>h</b>
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;"><math>q</math></div>	1 <b>i</b>
5	$p > q$	3-4 <b>ii</b>
6	$r$	2, 5 <b>mp</b>
7	$[[p > q] > r] > r$	2-6 <b>ii</b>
8	$q > [[[p > q] > r] > r]$	1-7 <b>ii</b>

La siguiente prueba muestra el uso de la repetición (1.2.2):

1	$[s > s] > t$	<b>h</b>
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;">...</div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;"><math>s &gt; s</math></div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;"><math>t</math></div> </div>	— ¿cómo justificar? — justificable con <b>mp</b>
	$[[s > s] > t] > t$	1-¿? <b>ii</b>

Desde luego que la implicación puede justificarse con **ii**:

1	$[s > s] > t$	<b>h</b>
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;"><math>s</math></div>	<b>h</b>
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;"><math>s</math></div>	2 <b>r</b>
4	$s > s$	2-3 <b>ii</b>
5	$t$	1, 4 <b>mp</b>
6	$[[s > s] > t] > t$	1-5 <b>ii</b>

El tercer paso es el resultado de repetir el segundo.

---

\* UNIDAD DE EJERCICIOS 2: LAS REGLAS **ii, mp**

Estos ejercicios presuponen las semirreglas y las reglas de la implicación.

A. Saque cualquier consecuencia que pueda y escríbala abajo con número de paso y justificación (regla y referencia numérica):

$$\begin{array}{l|l} \text{A1.} & 1 \quad p \\ & 2 \quad p > q \\ & \hline & i? \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{A2.} & 1 \quad A > B \\ & 2 \quad B \\ & \hline & i? \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{A3.} & 1 \quad r > t \\ & 2 \quad r \\ & \hline & i? \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{A4.} & 1 \quad r > [s \& s] \\ & 2 \quad r \\ & \hline & i? \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{A5.} & 1 \quad p \\ & 2 \quad r \\ & 3 \quad p > s \\ & \hline & i? \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{A6.} & 1 \quad s > t \\ & 2 \quad p \\ & 3 \quad t \\ & 4 \quad s \\ & 5 \quad q \& q \\ & \hline & i? \end{array}$$

A7.     1 |  $[p > [q \& s]] > [r \vee p]$   
           2 |  $p$   
           3 |  $p > q$   
           4 |  $p > [q \& p]$   
           5 |  $r \vee p$   
           6 |  $p > [q \& s]$   
           |  
           |  $i?$

B. Resuelva estas pruebas hipotéticas, comenzando con las premisas y derivando el último paso (la conclusión).

B1.     1 |  $p$   
           |  
           | ...  
           |  $q > p$

B2.     1 |  $q > r$   
           |  
           | ...  
           |  $[p > q] > [p > r]$

B3.     1 |  $p > q$   
           2 |  $q > r$   
           |  
           | ...  
           |  $p > r$

B4.     1 |  $s > p$   
           2 |  $s > [p > q]$   
           |  
           | ...  
           |  $s > q$

B5.     1 |  $s > [p > [q > r]]$   
           |  
           | ...  
           |  $s > [[p > q] > [p > r]]$

C. Resuelva estas pruebas categóricas (haga el secuento principal, escriba abajo la proposición que hay que probar y dérivela):

- C1.  $p > [q > p]$  (compárese con 1 arriba)
- C2.  $[q > r] > [[p > q] > [p > r]]$  (compárese con 2)
- C3.  $[s > [p > [q > r]]] > [s > [[p > q] > [p > r]]]$  (con 5)
- C4.  $[q > q] > [p > [q > q]]$
- C5.  $[p > [q > p]] > [r > [p > [q > p]]]$
- C6.  $[[r > [s > r]] > p] > p$  (¡piense!)
- C7.  $p > [q > [r > p]]$
- C8.  $[s > p] > [s > [r > p]]$
- C9.  $[p > [p > q]] > [p > q]$
- C10.  $[p > [q > r]] > [q > [p > r]]$

D. Formalice y resuelva estas pruebas (2 hipotéticas, una categórica):

D1. 

1	Si llueve, la tierra está mojada.
2	Llueve.
	...
	La tierra está mojada.

D2. 

1	$2 + 2 = 4$
	...
	Si voy, $2 + 2 = 4$

D3. Si voy, entonces si voy, voy.

E. Resuelva estas pruebas hipotéticas:

E1. 

1	$r > s$
2	$[p > p] > [q > r]$
	...
	$q > s$

E2. 

1	$p$
2	$[q > p] > [p > r]$
	...
	$r$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{E3.} & 1 \quad s > t \\
 & \hline
 & \dots \\
 & s > [r > t]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{E4.} & 1 \quad s > p \\
 & 2 \quad q > r \\
 & \hline
 & \dots \\
 & [p > [s > q]] > [s > r]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{E5.} & 1 \quad p > [q > [r > [s > t]]] \\
 & \hline
 & \dots \\
 & s > [r > [s > [q > [p > t]]]]
 \end{array}$$

F. Resuelva estas pruebas categóricas:

- F1.  $[p > [q > r]] > [[p > q] > [p > r]]$
- F2.  $p > [[p > [p > q]] > q]$
- F3.  $[p > [q > [r > s]]] > [q > [[r > p] > [r > s]]]$
- F4.  $[p > q] > [[q > r] > [s > [[s > p] > r]]]$
- F5.  $[[[p > q] > r] > s] > [p > [q > [r > s]]]$
- F6.  $[p > q] > [[r > s] > [[q > r] > [p > s]]]$

G. Escriba las pruebas 3 y 5 como pruebas categóricas.

H. Explique lo que quiere decir la repetición condicionada ( $p > [q > p]$ ).

## 1.4 Conjunción

### 1.4.1 La regla de la eliminación de la conjunción

*ec: eliminación de la conjunción*

Puede expresarse en dos formas:

$$\begin{array}{l|l}
 1 & A \ \& \ B \\
 & \hline
 2 & A
 \end{array}
 \qquad
 1 \text{ ec}$$

---

1	A & B	
2	B	1 ec

Se puede desprender, pues, cada parte de una conjunción. Un ejemplo con constantes ( $S$ : “hace sol”,  $L$ : “llueve”):

1	S & L	<b>h</b>
2	L	<b>h</b>

Un ejemplo con variables:

1	r	<b>h</b>
2	s & q	<b>h</b>
3	t	<b>h</b>
4	q	2 ec

### 1.4.2 La regla de la introducción de la conjunción

**ic:** *introducción de la conjunción*

Puede expresarse en dos formas:

1	A	
2	B	
3	A & B	1, 2 ic

1	A	
2	B	
3	B & A	1, 2 ic

Se pueden combinar dos fórmulas en cualquier orden para formar una conjunción. Un ejemplo ( $I$ : “se ve el arcoiris”):

1	S	<b>h</b>
2	L	
3	[S & L] > I	<b>h</b>
4	S & L	1, 2 ic
5	I	3, 4 mp

### 1.4.3 Estrategia

En el caso de **ec**, se trabaja “para abajo”: si hay una conjunción arriba (ya justificada), casi siempre conviene romperla inmediatamente con **ec**. Sin embargo, no siempre hay que desprender los dos conjuntos, cuando se necesita uno solo para completar la prueba o una parte de ella. Con **ic** se trabaja “para arriba”: para derivar una conjunción que está abajo (todavía no está justificada),

$$\left| \begin{array}{l} i? \\ p \& q \end{array} \right. \quad (\mathbf{ic})$$

hay que justificar cada conyunto por separado y reunirlos mediante **ic**:

$$\begin{array}{l} n \\ m \end{array} \left| \begin{array}{l} \dots \\ p \\ \dots \\ q \\ p \& q \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i? \\ i? \\ n, m \mathbf{ic} \end{array}$$

#### \* UNIDAD DE EJERCICIOS 3: LAS REGLAS **ic**, **ec**, **ii**, **mp**

Estos ejercicios presuponen las semirreglas y las reglas de la implicación y de la conjunción.

A. Resuelva estas pruebas:

$$\text{A1.} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} p \\ r \\ q \\ \dots \\ p \& q \end{array} \right.$$

$$\text{A2.} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} s \\ t \\ p \\ \dots \\ t \& s \end{array} \right.$$

$$\text{A3.} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} p \\ q \\ r \\ s \\ \dots \\ p \& p \end{array} \right.$$

- A4.  $[p \& q] > q$   
 A5.  $[p \& q] > p$   
 A6.  $[p \& q] > [q \& p]$   
 A7.  $[[p \vee q] \& r] > [r \& [p \vee q]]$   
 A8.  $[[p \& q] \& r] > [p \& [q \& r]]$   
 A9.  $[p > [q > r]] > [[p \& q] > r]$   
 A10.  $[[p \& q] > r] > [p > [q > r]]$   
 A11.  $[[p > q] \& [q > r]] > [p > r]$   
 A12.  $p > [p \& p]$   
 A13.  $[p \& p] > p$   
 A14.  $[[p \& q] \& [p > r]] > [[[p > q] \& r] \& [q \& p]]$   
 A15.  $[p > q] > [[r \& p] > q]$   
 A16.  $[p \& [p > q]] > q$   
 A17.  $[p \& q] > [[[p \& q] > r] > [q \& r]]$   
 A18.  $[[p > q] \& [p > r]] > [p > [q \& r]]$   
 A19.  $[p > [q \& r]] > [[p > q] \& [p > r]]$   
 A20.  $[[[p \& q] \& [p > r]] \& [q > s]] > [r \& s]$   
 A21.  $[p > [q > [r > s]]] > [[[p \& q] \& r] > s]$   
 A22.  $[[p \& [q \& r]] > s] > [p > [q > [r > s]]]$   
 A23.  $[[p > q] \& [r > s]] > [[p \& r] > [q \& s]]$   
 A24.  $[[p > q] > [r > s]] > [[p \& r] > [q > s]]$

B. Traduzca al simbolismo y resuelva:

B1.     1 | Llueve y nieva.  
           2 | Si llueve estoy contento.  
           | ---  
           ...  
           | Estoy contento.

B2.     1 | Juan es alto pero flaco.  
           2 | Juan pierde si es flaco.  
           3 | Si Juan pierde, está triste.  
           | ---  
           ...  
           | Juan está triste.

B3.     1 | Si toses estás agripado y sufres.  
           2 | Toses.  
           3 | Si sufres, perseverarás.  
           | ---  
           ...  
           | Estás agripado pero perseverarás.

---

## 1.5 Coimplicación (equivalencia)

### 1.5.1 Definición

La coimplicación o equivalencia puede definirse en términos de la implicación y la conjunción; e. d.,  $p \leftrightarrow q$  puede tomarse como abreviatura de  $[p \supset q] \& [q \supset p]$ . Tal oración también se llama “bicondicional”. En símbolos:

$$p \leftrightarrow q =_{df} [p \supset q] \text{ y } [q \supset p]$$

donde  $=_{df}$  significa “se define como”, “es abreviatura de”.

Por lo tanto, todo lo que podemos probar usando las reglas de la coimplicación, lo podemos probar usando las reglas de la conjunción, la implicación y la semirregla de la repetición  $r_{df}$ . Hay que usar  $r_{df}$  porque tenemos que repetir la abreviatura  $p \leftrightarrow q$  en su forma larga  $[p \supset q] \& [q \supset p]$  y ésta en su forma corta (1.2.2).

### 1.5.2 La regla de la eliminación de la coimplicación

La regla en realidad son dos usos de **mp**:

**eci**: *eliminación de la coimplicación*

Puede expresarse en dos formas:

1		$A \leftrightarrow B$	<b>h</b>
2		$A$	<b>h</b>
3		$B$	1, 2 <b>eci</b>

1		$A \leftrightarrow B$	<b>h</b>
2		$B$	<b>h</b>
3		$A$	1, 2 <b>eci</b>

Un ejemplo:

1		$s$	<b>h</b>
2		$q \leftrightarrow s$	<b>h</b>
3		$q$	1, 2 <b>eci</b>

No hay que confundir **eci** con el “*modus ponens* falso” (14.1.2). En la prueba de arriba podemos derivar  $q$  de los primeros dos pasos porque el segundo es una *coimplicación* ( $q \leftrightarrow s$  incluye  $s > q$ ). Si fuera una implicación, no se permitiría:

NO:	1		$s$	<b>h</b>
	2		$q > s$	<b>h</b>
	3		$q$	— ERROR ( <i>modus ponens</i> F)

Podemos resolver la misma prueba sin usar **eci**, de esta manera:

	1		$s$	<b>h</b>
	2		$q \leftrightarrow s$	<b>h</b>
	3		$[q > s] \& [s > q]$	2 <b>r<sub>ar</sub></b>
	4		$s > q$	2 <b>ec</b>
	5		$q$	1, 4 <b>mp</b>

### 1.5.3 La regla de la introducción de la coimplicación

**ici**: *introducción de la coimplicación*:

La regla representa esencialmente dos usos de **ii**:

	1		A	<b>h</b>
			...	
	n		B	
			B	<b>h</b>
			...	
	k		A	
	k + 1		$A \leftrightarrow B$	1 - n, n + 1 - k <b>ici</b>

Si se quiere, pueden colocarse las subpruebas, una al lado de la otra:

	1		A	<b>h</b>		n + 1		B	<b>h</b>
			...					...	
	n		B			k		A	
	k + 1		$A \leftrightarrow B$						1 - n, n + 1 - k <b>ici</b>

### 1.5.4 Estrategia

Existe un paralelismo entre **eci** y **mp** y entre **ici** e **ii**. En los dos casos se trabaja “de arriba para abajo”. El uso de **ici** para justificar una coimplicación es tan rutinario como usar **ii** para justificar una implicación, pues es muy frecuente la necesidad de demostrar que dos fórmulas son equivalentes.

#### \* UNIDAD DE EJERCICIOS 4: LAS REGLAS **ici**, **eci**, **ic**, **ec**, **ii**, **mp**

Estos ejercicios presuponen las semirreglas y las reglas de la implicación, conjunción y coimplicación.

A. Resuelva estos ejercicios:

A1.  $p \leftrightarrow p$  (trate de resolverlo de dos maneras)

A2.  $[p \leftrightarrow q] \leftrightarrow [q \leftrightarrow p]$  (¿qué significa esta fórmula?)

A3. 
$$\begin{array}{l|l} 1 & p \leftrightarrow q \\ 2 & q \leftrightarrow r \\ & \dots \\ & p \leftrightarrow r \end{array}$$

A4.  $[[p \leftrightarrow q] \& [q \leftrightarrow r]] > [p \leftrightarrow r]$  (compárese con A3)

A5.  $[p \& r] \leftrightarrow [r \& p]$  (¿qué significa esta fórmula?)

A6. 
$$\begin{array}{l|l} 1 & p \leftrightarrow q \\ 2 & r \leftrightarrow s \\ & \dots \\ & [p > r] \leftrightarrow [q > s] \end{array}$$

A7.  $[p > [q > [p > r]]] \leftrightarrow [[q \& p] > r]$

A8.  $[[p > q] > [p > r]] \leftrightarrow [p > [[p > q] > r]]$

A9.  $[p \leftrightarrow [p \& q]] \leftrightarrow [p > q]$

A10.  $[p \leftrightarrow q] > [[r \& p] \leftrightarrow [r \& q]]$

A11.  $[p \leftrightarrow q] > [[r > p] \leftrightarrow [r > q]]$

A12.  $[[q \leftrightarrow p] \& [q > r]] > [p > r]$

A13.  $[[p \leftrightarrow [q \& r]] \& [r \leftrightarrow [s \& t]]] > [p \leftrightarrow [q \& [s \& t]]]$

A14.  $[[[p \& q] > s] \& [[p \& s] > q]] \leftrightarrow [p > [s \leftrightarrow q]]$

A15.  $q > [q \leftrightarrow [p > p]]$  (¿qué significa esta fórmula?)

A16.  $[[p \leftrightarrow q] \& [r \leftrightarrow s]] > [[p \leftrightarrow r] \leftrightarrow [q \leftrightarrow s]]$

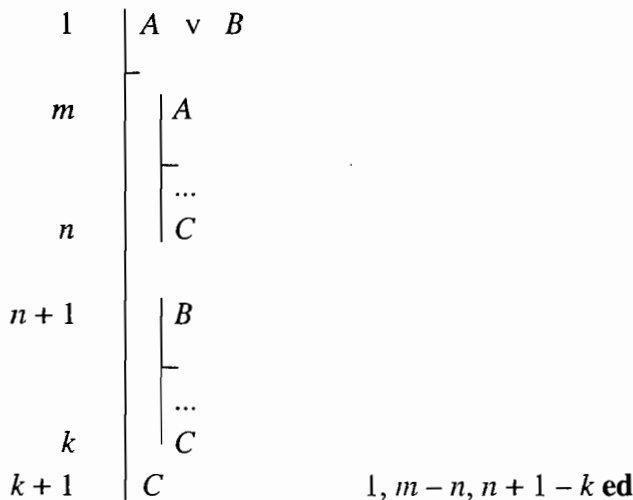
B. ¡Usted es el detective! ¿Quién asesinó a la condesa? He aquí 5 “pistas”, las cuales son las premisas (hipótesis) de una prueba formal. *Usted mismo* tiene que sacar la conclusión (el último paso), el cual debe ser o *S* (“la sobrina mató a la condesa”) o *M* (“el mayordomo mató a la condesa”), o *H* (“Sherlock Holmes asesinó a la condesa”) —o alguna conjunción de *S*, *M* y *H* (si hay más de un asesino)—. Puede traducir “el perro ladró” con *P*, “el reloj del comedor fue atrasado a propósito” con *R* y “la condesa se acostó a las once” con *A*.

- |   |  |
|---|--|
| 1 | Si la sobrina mató a la condesa, el perro ladró.   |
| 2 | Si el mayordomo mató a la condesa, el perro ladró.   |
| 3 | La sobrina mató a la condesa si el reloj del comedor fue atrasado a propósito.                         |
| 4 | Si el perro ladró y si la condesa se acostó a las once, entonces Sherlock Holmes asesinó a la condesa. |
| 5 | El reloj del comedor fue atrasado a propósito y la condesa se acostó a las once.                       |
|   | ...  |
|   | ¿?   |

## 1.6 Disyunción

### 1.6.1 La regla de la eliminación de la disyunción

*ed: eliminación de la disyunción*



La regla tiene la forma de un dilema. Digamos, p. ej., que falta gasolina (*F*) o la batería está muerta (*B*); en ambos casos no arranca el motor ( $\sim A$ ):

1	$F \vee B$	<b>h</b>
2	$F > \sim A$	<b>h</b>
3	$B > \sim A$	<b>h</b>
4	$F$	<b>h</b>
5	$F > \sim A$	<b>2 i</b>
6	$\sim A$	<b>4, 5 mp</b>
7	$B$	<b>h</b>
8	$B > \sim A$	<b>3 i</b>
9	$\sim A$	<b>7, 8 mp</b>
10	$\sim A$	<b>1, 4-6, 7-9 ed</b>

Como en el caso de **ici**, las subpruebas de **ed** pueden colocarse una al lado de la otra.

### 1.6.2 La regla de la introducción de la disyunción

**id:** *introducción de la disyunción*

Puede expresarse en dos formas:

1	$A$	
2	$A \vee B$	<b>1 id</b>

1	$A$	
2	$B \vee A$	<b>1 id</b>

Si una proposición es V, podemos agregarle una cuña y *cualquier* otra proposición, aunque sea ésta F, pues basta que un disyunto sea V para que toda la disyunción sea V. Un ejemplo (C:  $2 + 2 = 4$ ; S: soy el rey de China):

1	$C$	<b>h</b>
2	$S \vee C$	<b>1 id</b>

pues si dos más dos son cuatro, entonces lo son o (no “y”) soy yo el rey de China.

### 1.6.3 Estrategia

En los dos casos, el de **id** y el de **ed**, se trabaja “para abajo”. Los principiantes a veces son renuentes a usar **id**, quizás porque es tan sencillo. También existe una confusión cuando  $C$  mismo, conclusión de la regla **ed**, es una disyunción, pues parece paradójico usar la regla de la eliminación de la disyunción para introducir una disyunción (evidentemente la que se elimina es la de arriba). Un ejemplo sería la simetría de la disyunción ( $q \vee p$  corresponde a  $C$  en la regla):

1	$p \vee q$	<b>h</b>
2	$p$	<b>h</b>
3	$q \vee p$	<b>2 id</b>
4	$q$	<b>h</b>
5	$q \vee p$	<b>4 id</b>
6	$q \vee p$	<b>1, 2-3, 4-5 ed</b>

Cuando hay una disyunción ya justificada arriba, si no pueden usarse **mp**, **ii** ni **ec**, casi siempre vale la pena aplicarle **ed** inmediatamente.

#### \* UNIDAD DE EJERCICIOS 5: LAS REGLAS **id**, **ed**, **ici**, **eci**, **ic**, **ec**, **ii**, **mp**

Estos ejercicios presuponen las semirreglas y las reglas de la implicación, conjunción, coimplicación y disyunción.

A. Resuelva estas pruebas:

A1.  $s > [t \vee s]$

A2.  $s > [s \vee r]$

A3.  $[p \vee q] \Leftrightarrow [q \vee p]$  (simetría de la disyunción)

A4.  $[[p \vee q] \vee r] \Leftrightarrow [p \vee [q \vee r]]$  (asociación de la disyunción)

A5.  $[p \& [q \vee r]] \Leftrightarrow [[p \& q] \vee [p \& r]]$

A6. 
$$\begin{array}{|l} 1 \\ \hline \dots \\ [p \vee q] > r \end{array}$$

$$A7. \quad \begin{array}{l|l} 1 & [p \vee q] > r \\ \hline & \dots \\ & [p > r] \& [q > r] \end{array}$$

$$A8. \quad [[r \& s] \vee r] > r$$

$$A9. \quad \begin{array}{l|l} 1 & p \vee q \\ 2 & p > r \\ 3 & q > s \\ \hline & \dots \\ & r \vee s \end{array} \quad (\text{dilema constructivo complejo})$$

$$A10. \quad [[r \& p] \vee [q \& s]] > [r \vee s]$$

$$A11. \quad [[p \vee q] \diamond q] \diamond [p > q]$$

$$A12. \quad \begin{array}{l|l} 1 & [p \& r] > q \\ 2 & p > [q \vee r] \\ \hline & \dots \\ & p > q \end{array}$$

$$A13. \quad [[p \& q] \vee q] \diamond q$$

$$A14. \quad [[p \& q] \vee [q \& r] \vee [r \& p]] \diamond [[p \vee q] \& [q \vee r] \& [r \vee p]]$$

B. Traduzca y resuelva:

B1. Si llueve, entonces llueve o soy el rey de China.

B2. Si soy alto y flaco, entonces soy flaco y alto.

B3. Premisas: 1) El corazón se detiene o los pulmones dejan de funcionar. 2) Si el corazón se detiene, se muere. 3) Se muere si los pulmones dejan de funcionar. Conclusión: se muere.

B4. Premisa: Alberto es pequeño. Conclusión: Si Berta es alta, entonces Alberto es alto o pequeño.

---

## 1.7 Negación

### 1.7.1 Alcance de la tilde

Tenemos que usar corchetes “[ ]” cuando la negación debe afectar una proposición molecular como conjunto (1.1.2.3):

En  $\sim Fx \vee Gx$ , la fuerza de la tilde “ $\sim$ ” se extiende sólo hasta la equis de  $Fx$ ; no incluye la de  $Gx$ . “Gobierna”  $Fx$ , pero no  $Gx$ ;  $Fx$  está, pero  $Gx$  no, en el “dominio” o el “alcance” de la tilde.

En cambio, en  $\sim[Fx \vee Gx]$  la fuerza de la tilde se extiende a las dos equis, tanto a la de  $Fx$  como a la de  $Gx$ . Las dos fórmulas atómicas, pues, están dentro del dominio de la tilde.

El manejo de la tilde en este respecto es igual al de los cuantificadores y los operadores modales (2.2.2).

### 1.7.2 La regla de la eliminación de la negación

**eng:** *eliminación de la negación* (eliminación de la contradicción)

1		$A$	
2		$\sim A$	
		—	
3		$B$	1, 2 eng

Note que los números se refieren a los pasos contradictorios (1 y 2).

El sentido es que una contradicción implica *cualquier* proposición, aunque sea ésta  $F$ . La regla se encuentra por primera vez en la historia de la lógica en el Pseudoescoto, autor de una lógica en el siglo XIV (ver la introducción); la expresa así:

De cualquier oración que implica una contradicción formal se sigue cualquier otra oración por inferencia formal.<sup>32</sup>

Ofrece la siguiente defensa de su validez con la ayuda de otras reglas (abreviamos sus ejemplos originales:  $S$ : “Sócrates existe” y  $B$ : “un hombre es burro”); de la oración:

“ $S$  y  $\sim S$ ”, la cual incluye una contradicción formal, se sigue  $B$  o cualquier otra. Se demuestra de la siguiente manera. Vale “ $P$  y  $\sim S$  luego  $\sim S$ ” por ser inferencia formal de una conjunción a una de sus partes. Entonces se guarda esta conclusión “[ $\sim S$ ]”. Después, vale “ $S$  y  $\sim S$  luego  $S$ ”, por la misma

---

<sup>32</sup> “Ad quamlibet propositionem implicantem contradictionem de forma sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali”. In *universam logicam quaestiones*”.

regla. Y de  $S$  se sigue luego “ $S$  o  $B$ ”, porque cualquier proposición se infiere formalmente a sí misma con cualquier otra en una disyunción. Entonces se argumenta “ $S$  o  $B$  y  $\sim S$  (la proposición antes guardada), luego  $B$ ”. Y como se argumenta de esta [oración] puede argumentarse de cualquier otra, pues todas las inferencias son formales.<sup>33</sup>

Su procedimiento, con uso de variables (pues dice que las inferencias son “formales”) se representa así:

1	$p \ \& \ \sim p$	<b>h</b>
2	$\sim p$	<b>1 ec</b>
3	$p$	<b>1 ec</b>
4	$p \vee q$	<b>3 id</b>
5	$q$	<b>2, 4 sd</b>

donde **sd** es abreviatura de *silogismo disyuntivo* (1.9).

C. I. Lewis (1.7.2) presentó la misma demostración (ordenando los pasos 1, 3, 4, 2, 5) y también Kneale, Fitch, Haack y Hughes y Cresswell la reprodujeron. Se ha hecho hincapié en que no puede rechazarse la regla **eng** “por paradójico que parezca, sin rechazar algo esencial de la lógica” proposicional: las reglas de la eliminación de la conjunción, introducción de la disyunción o silogismo disyuntivo.<sup>34</sup> Hughes y Cresswell dicen que la demostración de la validez de **eng**

...muestra que el precio que hay que pagar por negar que  $p \ \& \ \sim p$  entrañe  $q$  [principio de la eliminación de la negación] es el abandono de al menos uno de [los principios: eliminación de la conjunción, introducción de la disyunción o silogismo disyuntivo]. Francamente, este precio nos parece excesivamente alto, pues todos parecen ser intuitivamente sanos y el principio de que  $p \ \& \ \sim p$  entraña  $q$  es, en el peor de los casos, inocente; en la práctica nunca podría despistarnos conduciéndonos de una premisa verdadera a una conclusión falsa, ya que ninguna proposición de la forma  $p \ \& \ \sim p$  puede ser verdadera.<sup>35</sup>

Un efecto de **eng** es que una contradicción no puede ser paso en ningún seciente *principal*, pues haría el sistema inconsistente. Una contradicción, pues, sólo puede aparecer en una subprueba. Un ejemplo del uso de la regla:

1	$p$	<b>h</b>									
2	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim p</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>h</b></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>p</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>1 i</b></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>2, 3 eng</b></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim p &gt; q</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>2-4 ii</b></td> </tr> </table> </td> <td style="padding-left: 20px;"><b>1-5 ii</b></td> </tr> </table>	$\sim p$	<b>h</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>p</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>1 i</b></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>2, 3 eng</b></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim p &gt; q</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>2-4 ii</b></td> </tr> </table>	$p$	<b>1 i</b>	$q$	<b>2, 3 eng</b>	$\sim p > q$	<b>2-4 ii</b>	<b>1-5 ii</b>
$\sim p$	<b>h</b>										
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>p</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>1 i</b></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>2, 3 eng</b></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim p &gt; q</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><b>2-4 ii</b></td> </tr> </table>	$p$	<b>1 i</b>	$q$	<b>2, 3 eng</b>	$\sim p > q$	<b>2-4 ii</b>	<b>1-5 ii</b>				
$p$	<b>1 i</b>										
$q$	<b>2, 3 eng</b>										
$\sim p > q$	<b>2-4 ii</b>										
3	$p$	<b>1 i</b>									
4	$q$	<b>2, 3 eng</b>									
5	$\sim p > q$	<b>2-4 ii</b>									
6	$p > [\sim p > q]$	<b>1-5 ii</b>									

<sup>33</sup> Texto en W. y M. Kneale, pp. 281-282.

<sup>34</sup> W. y M. Kneale, *The Development of Logic*, 1962, pp. 281-282.; Fitch, pp. 55-56. (sin referirlo al Pseudoescoto; menciona a E. F. Schneider); Haack, p.197 (comenta a la crítica de los lógicos de la relevancia); G. E. Hughes y M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, 1972, p. 338 (apéndice 2).

<sup>35</sup> Agregan un cuarto principio, la transitividad de la implicación; hablan en efecto de la implicación estricta:  $[p \ \& \ \sim p] \rightarrow q$ ; sobre la implicación en el Pseudoescoto véase J. Pinborg, *Logik und Semantik im Mittelalter*, 1972, pp. 174-175.

### 1.7.3 La regla de la introducción de la negación

**ing:** *introducción de la negación*

Puede expresarse en dos formas:

1	c	~A	<b>h</b>
		—	
		...	
		B	
n		~B	
n + 1	A		<b>1-n ing</b>

1	c	A	<b>h</b>
		—	
		...	
		B	
n		~B	
n + 1	~A		<b>1-n ing</b>

El sentido es que hay que negar una proposición si su negación entraña una contradicción. Lo que queremos hacer en la subprueba, pues, es derivar una contradicción; para indicar esta intención, marcamos la subprueba con una *c* (letra que significa “en esta subprueba hay que derivar una contradicción”).

Se ha llamado la tautología establecida en la siguiente prueba la *consequentia mirabilis* (“inferencia sorprendente”):

1		~p > p	<b>h</b>
		—	
2	c	~p	<b>h</b>
		—	
3		~p > p	<b>1 i</b>
4		p	<b>2, 3 mp</b>
5	p		<b>2-4 ing</b>
6	[~p > p] > p		<b>1-5 ii</b>

Aquí está un ejemplo de una prueba más difícil; es demostración de la “ley de Peirce”:

1		$[p > q] > p$	<b>h</b>
2	c	$\sim p$	<b>h</b>
3		$[p > q] > p$	1 i
4		$p$	<b>h</b>
5		$\sim p$	2 i
6		$q$	4, 5 eng
7		$p > q$	2-6 ii
8		$p$	3, 7 mp
9		$p$	2-8 ing
10		$[[p > q] > p] > p$	1-9 ii

La contradicción en la subprueba de **ing** consta del paso 8 ( $p$ ) y de la *hipótesis misma*, paso 2 ( $\sim p$ ), como si la regla fuera sencillamente:

1	c	A	<b>h</b>
		...	
n		$\sim A$	
n + 1		$\sim A$	1-n ing

### 1.7.4 Las reglas de la doble negación

Podemos establecer la validez de  $p \leftrightarrow \sim\sim p$  con la regla **ing**:

1		$p$	<b>h</b>
2	c	$\sim p$	<b>h</b>
3		$p$	1 i
4		$\sim\sim p$	2-3 ing
5		$\sim\sim p$	<b>h</b>
6	c	$\sim p$	<b>h</b>
7		$\sim\sim p$	5 i
8		$p$	6-7 ing
9		$p \leftrightarrow \sim\sim p$	1-4, 5-8 ici

Note que en las dos subpruebas (2-3 y 6-7), las hipótesis mismas (2 y 6) forman parte de la contradicción, como en la prueba de la ley de Peirce.

Podemos admitir, pues, estas reglas (derivadas) de la doble negación:

1. de eliminación

**edn:** *eliminación de la doble negación:*

1	~~A	<b>h</b>
2	A	<b>1 edn</b>

2. de introducción

**idn:** *introducción de la doble negación:*

1	A	<b>h</b>
2	~~A	<b>1 idn</b>

Con estas reglas es más sencillo establecer  $p \diamond \sim\sim p$ :

1	p	<b>h</b>
2	~~p 1	<b>idn</b>
3	~~p	<b>h</b>
4	p	<b>3 edn</b>
5	$p \diamond \sim\sim p$	<b>1-2, 3-4 ici</b>

### 1.7.5 Estrategia

Evidentemente se trabaja “para abajo” en **eng** y “para arriba” en **ing**. Una regla empírica muy útil: si no se puede hacer nada más, e. d., cuando ninguna otra regla es aplicable (**ec**, **mp**, **ii**, **ici**, **ed**...) ¡use **ing**! En realidad *cualquier* proposición lógicamente V puede justificarse mediante **ing**.

Los principiantes a veces confunden las reglas **ing** y **eng** de la siguiente manera. Aplican **ing**, derivando correctamente dos pasos contradictorios en la subprueba, pero en vez de reconocer que su tarea ha terminado (la operación de **ing** está completa en cuanto aparece la contradicción), aplican **eng** a los pasos contradictorios para sacar otra proposición, procedimiento que no tiene sentido.

## 1.8 Las equivalencias de Ockham

Un conjunto de equivalencias que relacionan la disyunción, conjunción y negación aparece ya en una obra del lógico Guillermo de Ockham (siglo XIV), quien las presentó como si fueran generalmente conocidas. Las equivalencias suelen llamarse también “de De Morgan” (“**dm**”), porque se pensó que A. De Morgan, lógico inglés de mediados del siglo pasado, había sido el primero que las descubrió.

*oc: equivalencias de Ockham*

$A \& B$	$\Leftrightarrow$	$\sim[\sim A \vee \sim B]$
$A \& \sim B$	$\Leftrightarrow$	$\sim[\sim A \vee B]$
$\sim A \& B$	$\Leftrightarrow$	$\sim[A \vee \sim B]$
$\sim A \& \sim B$	$\Leftrightarrow$	$\sim[A \vee B]$
$A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\sim[\sim A \& \sim B]$
$A \vee \sim B$	$\Leftrightarrow$	$\sim[\sim A \& B]$
$\sim A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\sim[A \& \sim B]$
$\sim A \vee \sim B$	$\Leftrightarrow$	$\sim[A \& B]$

Se permite que estas equivalencias se usen como regla para introducir una fórmula de la otra equivalente. Llamamos a esta regla “equivalencias de Ockham” (**oc**). Un ejemplo de su uso:

1	$\sim[s \vee \sim r]$	<b>h</b>
2	$\sim s \& r$	<b>1 oc</b>
3	$\sim s \& r$	<b>h</b>
4	$\sim[s \vee \sim r]$	<b>3 oc</b>
5	$\sim[s \vee \sim r] \Leftrightarrow [\sim s \& r]$	<b>1-2, 3-4 ici</b>

Es importante usar corchetes cuando se quiere negar una fórmula molecular (1.1.2.3, 1.7.1).

Las equivalencias de Ockham pueden derivarse en nuestro sistema, pero es mucho más fácil presuponerlas como reglas derivadas. Observe que es compleja la derivación de la proposición arriba sin usar las equivalencias como regla:

1		$\sim[s \vee \sim r]$	<b>h</b>
2		$c$   $s$	<b>h</b>
3		$s \vee \sim r$	<b>2 id</b>
4		$\sim[s \vee \sim r]$	<b>1 i</b>
5		$\sim s$	<b>2-4 ing</b>
6		$\sim r$	<b>h</b>
7		$s \vee \sim r$	<b>6 id</b>
8		$\sim[s \vee \sim r]$	<b>1 i</b>
9		$r$	<b>6-8 ing</b>
10		$\sim s \ \& \ r$	<b>5, 9 ic</b>
11		$\sim s \ \& \ r$	<b>h</b>
12		$\sim s$	<b>11 ec</b>
13		$r$	<b>11 ec</b>
14		$c$   $s \vee \sim r$	<b>h</b>
15		$s$	<b>h</b>
16		$\sim s$	<b>12 i</b>
17		$\sim[s \vee \sim r]$	<b>15, 16 eng</b>
18		$\sim r$	<b>h</b>
19		$r$	<b>13 i</b>
20		$\sim[s \vee \sim r]$	<b>18, 19 eng</b>
21		$\sim[s \vee \sim r]$	<b>14, 15-17, 18-20 ed</b>
22		$\sim[s \vee \sim r]$	<b>14-21 ing</b>
23		$\sim[s \vee \sim r] \ \diamond \ [\sim s \ \& \ r]$	<b>1-10, 11-22 ici</b>

Note que se escoge  $\sim[s \vee \sim r]$  con **ing** (pasos 17 y 20) porque al sacarse de las subpruebas con **ed** (paso 21) contradice  $s \vee \sim r$  (paso 14).

Estratégicamente, hablando en general, una conjunción o disyunción negada ( $\sim[\sim p \ \& \ q]$ ,  $\sim[s \vee \sim t]$ ...), cuando aparece arriba hay que aplicarle la regla **oc** y cuando aparece abajo hay que introducirla con **ing**, pues de esta manera se puede trabajar con la fórmula positiva (no negada).

## 1.9 Reglas derivadas

Hemos visto que las reglas de la doble negación (**idn** y **edn**) son derivables de otras y que las equivalencias de Ockham pueden usarse como reglas. Otras, derivadas también, son muy servibles en la resolución de las pruebas formales. Aquí están algunas.

1. **mt**: *modus tollens* (“*modus tollendo tollens*”, en latín para: “la regla según la cual se niega el antecedente de una implicación al negarse su consecuente):

1	$A > B$	<b>h</b>
2	$\sim B$	<b>h</b>
	┌	
3	$\sim A$	1, 2 <b>mp</b>

Evidentemente tenemos estas variaciones:

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A &gt; \sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>mt</b></td></tr> </table>	1	$A > \sim B$		2	$B$			┌		3	$\sim A$	1, 2 <b>mt</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A &gt; B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>mt</b></td></tr> </table>	1	$\sim A > B$		2	$\sim B$			┌		3	$A$	1, 2 <b>mt</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A &gt; \sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>mt</b></td></tr> </table>	1	$\sim A > \sim B$		2	$B$			┌		3	$A$	1, 2 <b>mt</b>
1	$A > \sim B$																																					
2	$B$																																					
	┌																																					
3	$\sim A$	1, 2 <b>mt</b>																																				
1	$\sim A > B$																																					
2	$\sim B$																																					
	┌																																					
3	$A$	1, 2 <b>mt</b>																																				
1	$\sim A > \sim B$																																					
2	$B$																																					
	┌																																					
3	$A$	1, 2 <b>mt</b>																																				

Aquí está la prueba de la primera forma (en metalenguaje):

1	$A > B$	<b>h</b>
2	$\sim B$	<b>h</b>
	┌	
3	c   $A$	<b>h</b>
4	┌   $A > B$	1 i
5	$B$	3, 4 <b>mp</b>
6	$\sim B$	2 i
7	$\sim A$	3-6 <b>ing</b>

2. **sd**: *silogismo disyuntivo*

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A \vee B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>sd</b></td></tr> </table>	1	$A \vee B$		2	$\sim A$			┌		3	$B$	1, 2 <b>sd</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A \vee B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>sd</b></td></tr> </table>	1	$A \vee B$		2	$\sim B$			┌		3	$A$	1, 2 <b>sd</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A \vee B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>sd</b></td></tr> </table>	1	$\sim A \vee B$		2	$A$			┌		3	$B$	1, 2 <b>sd</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A \vee B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>sd</b></td></tr> </table>	1	$\sim A \vee B$		2	$\sim B$			┌		3	$A$	1, 2 <b>sd</b>
1	$A \vee B$																																																		
2	$\sim A$																																																		
	┌																																																		
3	$B$	1, 2 <b>sd</b>																																																	
1	$A \vee B$																																																		
2	$\sim B$																																																		
	┌																																																		
3	$A$	1, 2 <b>sd</b>																																																	
1	$\sim A \vee B$																																																		
2	$A$																																																		
	┌																																																		
3	$B$	1, 2 <b>sd</b>																																																	
1	$\sim A \vee B$																																																		
2	$\sim B$																																																		
	┌																																																		
3	$A$	1, 2 <b>sd</b>																																																	
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A \vee \sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim B</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>sd</b></td></tr> </table>	1	$A \vee \sim B$		2	$\sim A$			┌		3	$\sim B$	1, 2 <b>sd</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A \vee \sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>sd</b></td></tr> </table>	1	$A \vee \sim B$		2	$B$			┌		3	$A$	1, 2 <b>sd</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A \vee \sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>sd</b></td></tr> </table>	1	$\sim A \vee \sim B$		2	$A$			┌		3	$B$	1, 2 <b>sd</b>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\sim A \vee \sim B</math></td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">┌</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>A</math></td><td style="padding-left: 20px;">1, 2 <b>sd</b></td></tr> </table>	1	$\sim A \vee \sim B$		2	$B$			┌		3	$A$	1, 2 <b>sd</b>
1	$A \vee \sim B$																																																		
2	$\sim A$																																																		
	┌																																																		
3	$\sim B$	1, 2 <b>sd</b>																																																	
1	$A \vee \sim B$																																																		
2	$B$																																																		
	┌																																																		
3	$A$	1, 2 <b>sd</b>																																																	
1	$\sim A \vee \sim B$																																																		
2	$A$																																																		
	┌																																																		
3	$B$	1, 2 <b>sd</b>																																																	
1	$\sim A \vee \sim B$																																																		
2	$B$																																																		
	┌																																																		
3	$A$	1, 2 <b>sd</b>																																																	

Aquí está la prueba de la primera forma (en metalenguaje):

1	A v B	<b>h</b>
2	~A	<b>h</b>
	┌	
3	A	<b>h</b>
	┌	
4	~A	2 i
5	B	3, 4 eng
	└	
6	B	<b>h</b>
	┌	
7	B	6 r
8	B	1, 3-5, 6-7 ed

3. **conpos**: *contraposición*

$A > B$	$\Leftrightarrow$	$\sim B > \sim A$
$A > \sim B$	$\Leftrightarrow$	$B > \sim A$
$\sim A > B$	$\Leftrightarrow$	$\sim B > A$
$\sim A > \sim B$	$\Leftrightarrow$	$B > A$

Las equivalencias pueden usarse como regla (**conpos**); por ejemplo:

1	p > ~s	<b>h</b>
	┌	
2	s > ~p	1 <b>conpos</b>

4. **ti**: *transitividad de la implicación*:

1	A > B	<b>h</b>
2	B > C	<b>h</b>
	┌	
3	A > C	1, 2 <b>ti</b>

lo cual fácilmente se muestra:

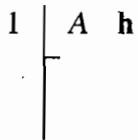
1		$A > B$	<b>h</b>
2		$B > C$	<b>h</b>
├──			
3		$A$	<b>h</b>
├──			
4		$A > B$	<b>1 i</b>
5		$B > C$	<b>2 i</b>
6		$B$	<b>3, 4 mp</b>
7		$C$	<b>5, 6 mp</b>
8		$A > C$	<b>3-7 ii</b>

### 1.10 Sumario de las reglas

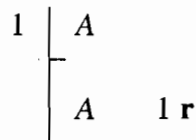
Aquí está un resumen de las reglas y semirreglas del cálculo proposicional.

#### Semirreglas

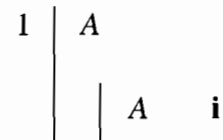
##### Hipótesis



##### Repetición



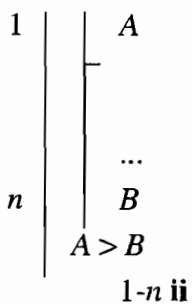
##### Iteración



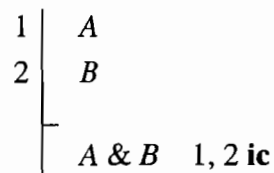
#### Reglas

##### Introducción

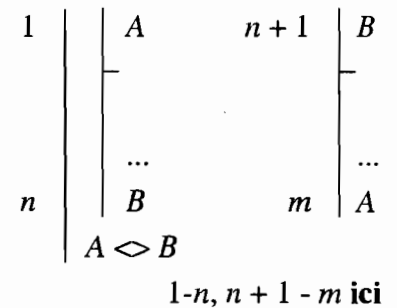
##### Implicación



##### Conjunción

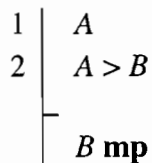


##### Coimplicación

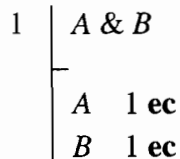


*Eliminación*

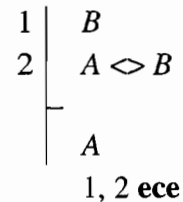
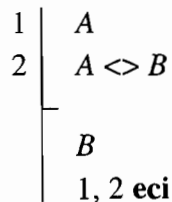
*Implicación*



*Conjunción*

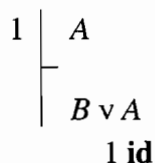
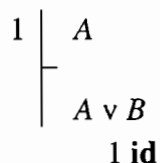


*Coimplicación*

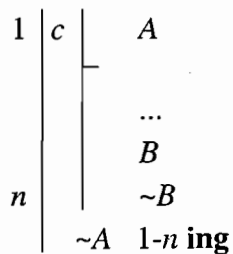


*Introducción*

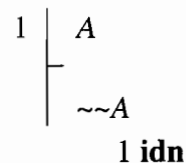
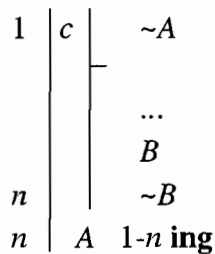
*Disyunción*



*Negación*

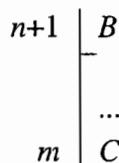
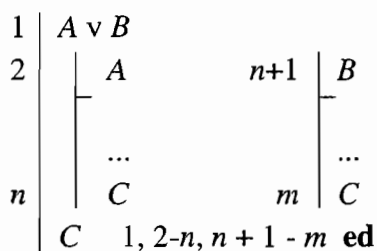


*Doble negación*

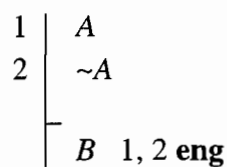


*Eliminación*

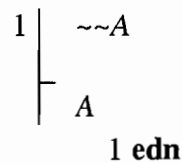
*Disyunción*



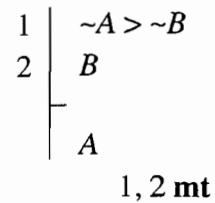
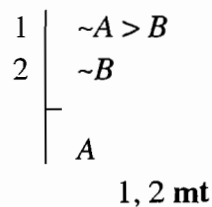
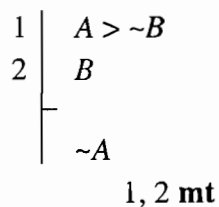
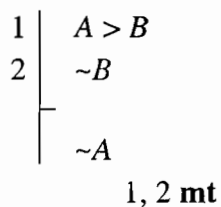
*Negación*



*Doble negación*



*Modus tollens*



*Silogismo disyuntivo*

$\begin{array}{l l} 1 & A \vee B \\ 2 & \sim A \\ \hline & B \quad 1, 2 \text{ sd} \end{array}$	$\begin{array}{l l} 1 & A \vee B \\ 2 & \sim B \\ \hline & A \quad 1, 2 \text{ sd} \end{array}$	$\begin{array}{l l} 1 & \sim A \vee B \\ 2 & A \\ \hline & B \quad 1, 2 \text{ sd} \end{array}$	$\begin{array}{l l} 1 & A \vee \sim B \\ 2 & B \\ \hline & A \quad 1, 2 \text{ sd} \end{array}$	...
---	---	---	---	-----

**Equivalencias**

*Equivalencias de Ockham*

$A \& B$	$\diamond$	$\sim[\sim A \vee \sim B]$
$A \& \sim B$	$\diamond$	$\sim[\sim A \vee B]$
$\sim A \& B$	$\diamond$	$\sim[A \vee \sim B]$
$\sim A \& \sim B$	$\diamond$	$\sim[A \vee B]$
$A \vee B$	$\diamond$	$\sim[\sim A \& \sim B]$
$A \vee \sim B$	$\diamond$	$\sim[\sim A \& B]$
$\sim A \vee B$	$\diamond$	$\sim[A \& \sim B]$
$\sim A \vee \sim B$	$\diamond$	$\sim[A \& B]$

*Contraposición*

$A > B$	$\diamond$	$\sim B > \sim A$
$A > \sim B$	$\diamond$	$B > \sim A$
$\sim A > B$	$\diamond$	$\sim B > A$
$\sim A > \sim B$	$\diamond$	$B > A$

**\* UNIDAD DE EJERCICIOS 6: LAS REGLAS *ing, eng* (= CÁLCULO PROPOSICIONAL)**

Estos ejercicios presuponen *todas* las reglas y semirreglas del cálculo proposicional (incluso las equivalencias de **oc**).

A. Resuelva:

- |  |               |
|--|---------------|
| A1. $p \diamond \sim\sim p$                            |               |
| A2. $p > [\sim p > q]$                                 |               |
| A3. $[[p \vee q] \& \sim p] > q$                       |               |
| A4. $[[p \vee q] \& \sim q] > p$                       |               |
| A5. $[[p \vee \sim q] \& \sim p] > \sim q$             | }             |
| A6. $[[p \vee \sim q] \& q] > p$                       |               |
| A7. $[[\sim p \vee \sim q] \& p] > \sim q$             |               |
| A8. $[\sim p \diamond q] \diamond [\sim q \diamond p]$ | <b>conpos</b> |
| A9. $[[\sim p > q] \& \sim q] > p$                     | }             |
| A10. $[[p > \sim q] \& q] > \sim p$                    |               |
| A11. $[[\sim p > \sim q] \& q] > p$                    |               |
| A12. $[p > q] \diamond [\sim p \vee q]$                | }             |
| A13. $\sim[p > q] \diamond [p \& \sim q]$              |               |

---

B. Establezca la validez de las equivalencias de **oc** (en estas dos pruebas no puede usar **oc**; ¡sería emplear lo que quiere probar!):

B1.  $[p \vee q] \Leftrightarrow \sim[\sim p \ \& \ \sim q]$

B2.  $[p \ \& \ q] \Leftrightarrow \sim[\sim p \vee \sim q]$

C. Traduzca y resuelva:

C1. Premisas: 1) La tierra está seca si no llueve. 2) No llueve. Conclusión: La tierra está seca.

C2. Premisas: 1) No es cierto que llueve o graniza. 2) Si no es cierto que llueve o graniza, entonces hay sol. Conclusión: Hay sol.

C3. Premisas: 1) Me mojo si llueve. 2) Si no llueve me deshidrato. 3) Sufro si me mojo y sufro si me deshidrato. Conclusión: Sufro.

C4. Premisas: 1) Hay nada o hay Dios. 2) Es F que no haya nada. Conclusión: Hay Dios.

D. ¿Cuál es la conclusión de estas premisas? 1) Si la gasolina no llega hasta el carburador, no arranca el coche. 2) El coche no arranca.

E. ¿Quién mató a Lord Bluebottom? ¿Su cuñado (C)? ¿Su sobrina (S)? ¿El joven capitán (J) Usted tiene que sacar la conclusión y demostrarla mediante una prueba formal. Aquí están las “pistas” (considérense como las premisas de la prueba):

1. O el té contenía cianuro o Lord Bluebottom fue asesinado por su cuñado.

2. Si Lord Bluebottom fue asesinado por su cuñado, entonces su sobrina no lo asesinó.

3. El té no contenía cianuro si el joven capitán no es el asesino.

4. Si la sobrina no lo asesinó, entonces no fue matado por su cuñado o el joven capitán es el asesino.

F. Diseñe un circuito eléctrico para expresar la implicación  $p > q$ . Como  $[p > q] \Leftrightarrow [\sim p \vee q]$ , es más fácil basar el circuito en  $\sim p \vee q$ ; use los patrones para la disyunción y negación de arriba (1.1.7).

### 1.11 Sistema de la tabulación

Ludwig Wittgenstein y E. L. Post elaboraron un método mecánico para determinar si una proposición (molecular) es una tautología, o sea, una verdad de la lógica proposicional. Se tabulan todas las combinaciones posibles del valor veritativo de una proposición y, si cada combinación da el resultado “V” (“1\*” abajo), la proposición es una tautología.

Veamos un ejemplo del principio de la repetición condicionada (1.3.2), donde la única relación es la implicación (recuerde que su función veritativa es 1011):